ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIII 1981 2

УДК 513

МАТЕМАТИКА

М. А. Мнацаканян

О площади области на развертывающейся поверхности

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 2/VIII 1981)

1. Семейство касательных к пространственной кривой Γ образует *развертывающуюся поверхность* (РП). Положение точки A на РП определяется расстоянием $u=AM$ по касательной к Γ и задающей точку касания M длиной v дуги (кривой) Γ. Как известно [1], коэффициенты первой дифференциальной формы Гаусса для РП равны: $E=1$, $F=1$, $G=1+u^2/\rho^2$, где $1/\rho$—кривизна Γ. Введем координаты (u, φ), где φ—угол на РП между двумя касательными к Γ. Тогда площадь некоторой области Ω на РП, ограниченной кривыми $u(\varphi)$ и Γ-уровнем $u(\varphi)=0$, и двумя касательными к Γ, определяемыми углами φ_1 и φ_2, дается выражением

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\iint\limits_{\Omega}udu dv/\rho=\frac{1}{2}\int\limits_{v_1}^{v_2}u^2dv/\rho$$

и, согласно определению кривизны $1/\rho=d\varphi/dv$, равна

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}u^2(\varphi)d\varphi. \tag{1}$$

Мы видим, что S *не зависит явно от длины* v *дуги* Γ.

Назовем *годографом* области Ω такую область на *конической* поверхности, которая получается параллельным переносом отрезков $u(\varphi)$ началами к одной точке M_0—*вершине* годографа. Выбрав в качестве Γ точку M_0, замечаем, что, с другой стороны, выражение (1) определяет полярную площадь на конической поверхности. Следовательно, справедлива.

Теорема. *Площадь любой области на развертывающейся поверхности равна площади годографа этой области (на конической поверхности).*

Другое, простое доказательство теоремы следует из равенства площади элементарного треугольника на РП, образованного двумя бесконечно близкими касательными к Γ и кривой $u(\varphi)$, и площади соответствующего треугольника-годографа. В справедливости теоремы можно убедиться еще проще, рассматривая Γ, согласно определению кривой линии, как предельный случай описанной около нее ломаной. Относительно же произвольной ломаной очевидно, что утверждение теоремы выполняется *точно*.

Будем говорить, что *отрезок вращается вокруг дуги Γ*, если он всегда находится на касательной к Γ. Площадь заметаемой им при этом фигуры зависит не от размеров дуги Γ, а только от закона изменения расстояний $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$ до концов отрезка в зависимости от его направления в пространстве. Можно произвольно менять размеры дуги Γ, оставляя ее *подобной себе*,—при этом заметаемая площадь останется *неизменной*. В пределе, стянув дугу Γ в точку, придем к вращению отрезка на годографе.

Утверждение теоремы допускает наглядную кинематическую интерпретацию. При бесконечно малом вращении вокруг дуги Γ отрезок совершает два мгновенных движения—вращение вокруг точки касания, сопровождающееся растяжением $u(\varphi)$, и скольжение вдоль себя. При скольжении вдоль себя отрезок никакой площади не заметает, вся площадь же заметается при вращениях вокруг точек касания—они и соответствуют вращению на годографе. Тривиален случай вращения отрезка вокруг ломаной—заметаемые им участки площадей сосредоточены у вершин ломаной; последние очевидным образом «складываются» в годограф.

Мы проиллюстрируем теорему о годографе на ряде примеров определения площадей. Затем дадим развитие теоремы применительно к нахождению объемов тел «вращения» вокруг цилиндров и конусов, а также специальных тел вращения. Заметим, что приведенные выше два простых доказательства теоремы, а также ее наглядная кинематическая интерпретация позволяют отнести как саму теорему, так и решения рассматриваемых ниже примеров п. 2—5 (и ряд других) к разряду элементарных.

2. Рассмотрим примеры определения площадей в частном случае, когда Γ—*плоская* кривая. Задача будет состоять фактически в *построении годографов*. Они строятся из элементарных геометрических соображений и представляют собой простейшие фигуры. Зная их площади, мы тем самым, согласно теореме, знаем и *искомые* площади. В примерах, отмеченных звездочками, формулируются новые результаты, в остальных—известные из курсов высшей математики (см., например, [2]).

Примеры. а)* Отрезок постоянной длины a, вращаясь вокруг замкнутой кривой, заметает *«овальное» кольцо*. Годограф такого кольца—*круг* радиуса a, и его площадь равна πa^2. В известном примере *кругового* кольца эта площадь вычисляется с помощью теоремы Пифагора.

б) *Трактриса*—кривая с постоянным отрезком a касательной до оси абсцисс. Годограф (двусторонней) трактрисы есть *полукруг* радиуса a, и, следовательно, площадь трактрисы равна $\pi a^2/2$.

Годограф симметрично *отсеченной трактрисы* образует *сегмент круга*, отсеченный на расстоянии от центра, равном ширине сечения.

в)* *Обобщенная трактриса.* Фигура, очерчиваемая следами колес велосипеда, заметается при вращении отрезка a—между осями колес, вокруг траектории заднего колеса. Годограф ее—*сектор круга* радиуса a. Примеры а) и б) следуют отсюда как частные случаи.

Если велосипед сворачивает с некоего направления на перпендикулярное, то искомая площадь равна $\pi a^2/4$, *независимо* от формы кривой поворота.

г) *Циклоида*—траектория точки катящейся по прямой окружности. В каждый момент круг совершает мгновенное вращение вокруг точки касания, так что касательная к циклоиде упирается всегда в верхнюю точку катящегося круга, служа его хордой. Вращаясь вокруг циклоиды, эта хорда заметает арку над ней—между циклоидой и описанным около нее прямоугольником. Поэтому годограф этой *арки*—катящийся *круг*.

Симметрично *отсеченная* часть этой арки имеет годографом *сегмент* катящегося круга с высотой, равной ширине сечения арки.

д)* *Линия погони*—траектория собаки, бегущей все время в направлении на удирающую лису. Если их скорости равны и лиса бежит по прямой, то в течение всей погони отрезок «собака—лиса» и его проекции на лисью дорожку в сумме сохраняют постоянную длину. Следовательно, фигура, ограниченная траекториями лисы и собаки и отрезком, соединяющим их начальные позиции, имеет годографом сектор *параболы* с вершиной в ее фокусе.

3. Пусть плоская кривая Γ служит направляющей цилиндра и в плоскости, касающейся этого цилиндра, расположена фигура Φ. Пусть эта плоскость *вращается вокруг цилиндра*, оставаясь все время касательной к его поверхности. Тогда фигура Φ заметет некое тело «вращения». В любом сечении рассматриваемой пространственной картины, параллельном плоскости Γ, имеет место теорема о годографе, в силу чего справедливо

Следствие 1. *Объем тела вращения плоской фигуры вокруг цилиндра не зависит от размеров цилиндра и равен объему годографа, образуемого соответствующим вращением фигуры вокруг неподвижной оси.*

Примеры. а) *Шар с цилиндрическим отверстием* получается вращением полукруга вокруг цилиндра. Поэтому объем такого кольца равен объему *шара* с диаметром, равным высоте отверстия. Аналогичный результат верен и для некругового цилиндра.

б) Сечение кругового конуса, параллельное его оси, образует гиперболу. При вращении вокруг оси конуса это сечение огибает некий цилиндр. При этом сегмент гиперболы заметает *конус с цилиндрическим отверстием*, объем которого легко найти. Вращаясь же вокруг своей оси, этот сегмент гиперболы образует годограф—сегмент *двуполостного гиперболоида*—с тем же (искомым) объемом.

в)* *Однополостный гиперболоид* получается вращением плоского угла вокруг цилиндра. Его объем складывается из объемов вписанного в него цилиндра и годографа—*конуса,* образуемого вращением угла вокруг своей стороны.

4. По аналогии с п. 3 рассмотрим вращение плоской фигуры вокруг конической поверхности. Из подобия кривых *Г,* являющихся параллельными сечениями конической поверхности, выводим

Следствие 2. *Объем тела вращения плоской фигуры вокруг конуса не зависит от сдвига фигуры вдоль образующей конуса* (к вершине или от). *Для кругового конуса с углом при вершине* 2α *этот объем равен объему годографа, умноженному на* $\cos\alpha$.

Примеры. а) *Шар с коническим отверстием* получается вращением полукруга вокруг конуса. Поэтому объем такого кольца равен объему *шара* с диаметром, равным стороне отверстия, умноженному на $\cos\alpha$.

б) Эллипс—сечение цилиндра, вращаясь вокруг оси цилиндра, огибает некий конус. При этом эллипс вращается вокруг этого конуса, заметая *цилиндр с конической воронкой* объемом в 2/3 объема цилиндра. С другой стороны, этому объему равен объем *эллипсоида* вращения, умноженный на $\cos\alpha$. С учетом этого фактора находим, что объем эллипсоида вращения (в частности, *шара*) в полтора раза меньше объема описанного цилиндра.

в) Парабола—сечение конуса, параллельное его образующей. Вращаясь вокруг оси конуса, оно огибает перевернутый (подобный) конус. Вращаясь же вокруг своей оси, образует *параболоид,* служащий годографом исходного *конуса с конической воронкой,* объем которого легко определить. Учитывая фактор $\cos\alpha$, находим: параболоид вдвое меньше описанного цилиндра.

Заметим, что в случае вращения вокруг кругового цилиндра или конуса объемы можно найти элементарно и без теоремы о годографе, используя свойство кругового кольца из примера а) п. 1, т. е. теорему Пифагора (автор ([3])).

5. Центр тяжести треугольника отстоит от основания на треть высоты, поэтому при вращении вокруг основания треугольник заметает объем, вдвое меньший, чем при вращении вокруг оси, параллельной основанию и проходящей через противолежащую вершину треугольника. Отсюда вытекает

Следствие 3. *Пусть при вращении отрезка вокруг дуги Г его конец движется по прямой X. Тогда объем тела вращения вокруг оси X фигуры Ф, ограниченной линиями Г и X, равен половине объема тела, образованноог вращением годографа этой фигуры вокруг оси H, проходящей через вершину годографа параллельно оси X.*

Примеры. а)* *Псевдосфера* образуется вращением трактрисы вокруг оси абсцисс *X*. Так как годограф трактрисы—полукруг радиуса *a,* то объем псевдосферы равен половине объема *шара* радиуса *a*.

В общем случае объем симметрично *отсеченной псевдосферы* равен объему полушария с цилиндрическим отверстием, высота которого равна отрезу a_X подкасательной в точке отсечения, или, согласно примеру а) п. 3, половине объема *шара* с радиусом a_X.

б)* *Линия погони* (пример д) п. 2), вращаясь вокруг «лисьей» прямой, ограничивает тело, объем которого равен половине объема *сектора параболоида* (с вершиной в фокусе параболоида).

6. Рассмотрим произвольную линию *Г*, заданную натуральным уравнением. Последнее легко свести ([2]) к виду $u=u(\varphi)$—зависимости длины дуги от угла наклона касательной или к обратному $\varphi=\varphi(u)$. Тогда в *обобщенной* форме теорема о годографе позволяет решить также следующие

Примеры. а)* Площадь фигуры, заключенной между *произвольной кривой* $u(\varphi)$ и ее *эвольвентой*, дается формулой (1). Заметим в частности, что для *эвольвенты окружности* годографом служит *спираль Архимеда.*

б)* Площадь одной *арки*, описываемой точкой окружности, катящейся по *произвольной* кривой $\varphi(u)$, больше площади катящегося круга в K раз:

$$K=3-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(u)\sin u du. \tag{2}$$

Частные случаи: $\varphi(u)=0$—циклоида, $\varphi(u)=\pm\frac{r}{R}u$—эпи- или гипоциклоида, $K=3\pm2\frac{r}{R}$.

Аналогичным образом можно также определить (с помощью теоремы о годографе) площади: гиперболы, показательной линии, подэры круга (в частности, кардиоиды), подэры эвольвенты круга; объемы тел вращения: показательной линии вокруг асимптоты, фигур, ограниченных кривыми Персея (в частности, овалами Кассини, лемнискатами Бута и Бернулли), вокруг оси симметрии, циклоиды вокруг касательной в ее вершине.

Мы рассмотрели примеры только с плоскими кривыми *Г*. Их аналоги, очевидно, выполняются и на развертывающихся поверхностях, поскольку из условия наложимости развертывающейся поверхности на плоскость следует *эквивалентность* формулировок теоремы о годографе для случаев пространственной и плоской кривых *Г*.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ՄՆԱՑԱԿԱՆՅԱՆ

Փռվող մակերևույթի տիրույթի մակերեսի մասին

Ապացուցվում է թեորեմ, որ փռվող մակերևույթի վրա գտնվող կամայական տիրույթի մակերեսը հավասար է կոնական մակերևույթի վրա գտնվող այդ տիրույթի հոդոգրաֆի մակերեսին։

Որպես կիրառություն որոշվում են երկրաչափական մի շարք ֆիգուրների մակերեսները և ծավալները։ Թեորեմի մեկնաբանությունը և դիտարկվող օրինակների լուծումները կարելի է դասել տարրականների շարքին։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. П. Фиников,* Дифференциальная геометрия, ГИТТЛ, М., 1952. [2] *А. А. Савелов,* Плоские кривые, ГИФМЛ, М., 1960. [3] *М. Мамикон,* Объем шара, Квант, № 5 1977.