М. А. Мнацаканян

К вопросу нахождения распределения звезд в бедных шаровидных скоплениях

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 28/III 1969)

1. Настоящая заметка касается, в основном, метода определения пространственного распределения звезд в очень бедных шаровидных скоплениях. Рассматриваемый вопрос мы иллюстрируем на следующем примере, в связи с которым он и был поставлен*.

В работе В. А. Амбарцумяна (1) предлагается новый метод определения потенциальной энергии U, который, в отличие от старых, применим к сравнительно бедным скоплениям. В предположении сферической симметрии, автор доказывает следующую изящную теорему

$$U = G\int_{-\infty}^{\infty}\rho^2(y)\,dy, \qquad (1)$$

где $\rho(y)$ —одномерное распределение плотности масс, G — гравитационная постоянная. Метод вычисления U весьма прост: наблюдаемая плоская картина скопления проектируется на некое направление y; ось y разбивается на ряд отрезков Δy, в каждом из которых считается сумма масс входящих в него звезд. Возведя величины $\rho(y)\Delta y$ в квадрат, разделив квадраты на Δy и взяв помноженную на G сумму полученных чисел по всем отрезкам, находим потенциальную энергию U.

Казалось бы, этот метод перестает быть корректным, если число звезд в скоплении очень мало, например, 20—30. Возникает вопрос о способе разбиения оси y на отрезки, в зависимости от чего величина (1) может принимать какие угодно значения от $GM^2/2R_0$ (M — масса, R_0 — радиус скопления) до бесконечности. Число отрезков, с одной стороны, должно быть достаточно большим, чтобы можно было построить „хорошую" функцию $\rho(y)$. Одновременно, оно должно быть достаточно малым (по сравнению с количеством звезд) из-за неизбеж-

* В. А. Амбарцумян, частное сообщение.

принципиальным затруднением. Какова надежность результата, получаемого при том или ином разбиении оси y?

Указанная некорректность, однако, относится, скорее, к самой постановке задачи, чем к изложенному методу. Действительно, при таком малом числе звезд в скоплении понятие сферической симметрии становится неопределенным, в то время как оно является существенным условием теоремы (1). Последняя, при надлежащей определенности постановки вопроса, может быть применима даже к скоплениям, состоящим, скажем, из 15 звезд. В отношении данного примера сущность возникшего вопроса состоит в нахождении приемлемой функции $\rho(y)$.

С точки зрения статистики, естественно, задача формулируется следующим образом: найти то сферически-симметрическое распределение, реализацией которого является наблюдаемое расположение звезд в скоплении. Нижеследующее рассмотрение уместно лишь постольку, поскольку мы будем иметь дело с задачами, в которых, то ли из целесообразности, то ли по другим причинам, ставится вопрос определения характеристик скопления именно по одномерной плотности звезд $f(y)$ (плотности массы и других аддитивных величин), что сводится к вопросу нахождения удовлетворительной функции $f(y)$; при наличии, конечно, двумерной картины распределения в скоплении.

2. Существует два метода определения пространственного распределения сферически-симметричного скопления: метод Цейпеля ([2]), исходящий из плотности распределения звезд $\varphi(r)$ на плоскости, и формула Пламмера ([3]), использующая одномерную плотность распределения звезд $f(y)$ вдоль некоторой оси y. Очевидно, метод Пламмера менее точен в сравнении с методом Цейпеля: одно и то же расположение звезд вдоль оси y может являться проекцией значительно различающихся между собой двумерных изображений (сказанное существенно относительно бедных скоплений, которые мы и рассматриваем). Можно сказать, что при проектировании на ось y теряется значительная доля информации, содержащейся в двумерной картине распределения, в том смысле, что в функцию $f(y)$ входят флуктуации, связанные с несимметричностью плоского изображения, а вместе с ней, и с выбором оси y.

Условие сферической симметрии искомого распределения, реализацией которого является данное скопление, наводит нас на следующие почти элементарные рассуждения. Снимем несколько копий скопления и, повернув их вокруг центра O на произвольные углы, наложим друг на друга. Проекция полученного „обогащенного“ скопления на ось y дает более удобную для оперирования функцию $n \cdot f(y)$ (n — число наложений). Фактически мы усредняем функцию $f(y)$ по различным направлениям y (ведь выбор направления оси y был произвольным). В пределе, при бесконечном числе наложений, наши действия сводятся к следующему. Мы равномерно „размазываем“ каждую полученное распределение плотностью

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi r N}\sum_{i=1}^{N} \delta(r - r_i). \tag{2}$$

Здесь N — число звезд в скоплении, r_i — расстояние i-ой звезды от центра O, а $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака. Тем самым мы избавляемся от флуктуаций по азимутальным направлениям; флуктуации же по радиусу принципиально неустранимы.

Подставляя (2) в следующее очевидное выражение для одномерной функции распределения

$$F(y) = \frac{1}{2} - 2\int\limits_{y}^{R_c} r\varphi(r)\arccos\frac{y}{r}\,dr, \qquad y \geqslant 0 \tag{3}$$

и интегрируя, находим

$$F(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi N}\sum_{r_i > y} \arccos\frac{y}{r_i}, \quad y \geqslant 0. \tag{4}$$

Плотность числа звезд по оси y равна: $f(y) = dF/dy$, $y \geqslant 0$.

Если некая величина s, характеризующая отдельную звезду, является аддитивной (то есть, для группы звезд она равна сумме соответствующих величин s_i отдельных звезд), то функция распределения этой величины s по оси y имеет следующий вид

$$F_s(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\,\frac{\sum\limits_{r_i > y} s_i \arccos\dfrac{y}{r_i}}{\sum\limits_i s_i}, \quad y \geqslant 0. \tag{5}$$

В частности, если все $s_i = 1$, величина s представляет собой число звезд и формула (5) переходит в (4).

Для определения пространственной плотности $\Phi(R)$ распределения звезд в сферических скоплениях обычно используют метод Цейпеля. При этом применяются численные методы Валленквиста решения интегрального уравнения Абеля. Хотя для этого уравнения было предложено много способов решения, предлагаемый нами метод нахождения функции Φ обладает рядом существенных преимуществ. Мы вычисляем пространственную плотность по формуле Пламмера

$$\Phi(R) = -\frac{1}{2\pi R}\,\frac{d^2F(R)}{dR^2}, \tag{6}$$

[illegible] в качестве одномерного распределения используем выражение (5). (Плотность величины s в пространстве определяется выражением, совершенно аналогичным (6) для числа звезд).

Вышеизложенный метод, понятно, ни в коем случае не уступает по точности методу Цейпеля и позволяет получить несравненно болений, предлагаемый метод, в отличие от метода Цейпеля, может быть применим к скоплениям, состоящим из сравнительно малого числа звезд.

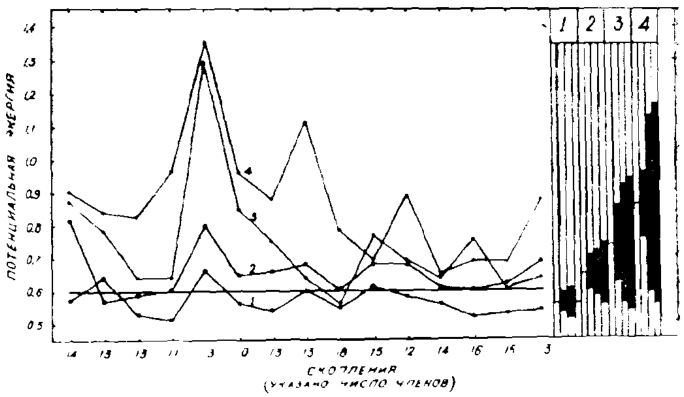

Рис. 1

3. В качестве примера использования функции (4) мы рассмотрели пятнадцать скоплений, построенных искусственно следующим образом. С помощью таблиц случайных чисел ([4]) задавалась случайная реализация равномерного распределения звезд в пространстве. Всякий раз мы брали 25 точек, каждая координата которых распределена по равномерному закону, и из полученной кубической области, которую заполняли эти точки, вырезали вписанный шар. Оставшееся в шаре количество точек в среднем должно составлять $\pi/6$ часть, то есть, почти половину от 25. На рис. 1 указано число членов в полученных таким путем шаровидных скоплениях.

В единицах $G = M = R_0 = 1$ потенциальная энергия однородного шара равна $U_{\text{теор}} = 3/5 = 0.6$. По заданному расположению точек в шаре мы считали точное значение потенциальной энергии реализованного скопления $U_{\text{реал}}$ (гистограмма *1*), приписывая всем точкам одинаковые массы.

Далее, каждое скопление проектировалось на произвольную плоскость. Полученная двумерная картина проектировалась на произвольную прямую y, и считалась потенциальная энергия по формуле (1). При этом мы ограничились разбиением оси y на 5 и на 8 равных отрезков. Соответствующие значения потенциальной энергии U_5 и U_8 представлены на рис. 1 гистограммами *3* и *4*. Гистограмма *2* изображает потенциальную энергию U, вычисленную по (1), но с использованием вышеописанного метода наложения. Мы видим, что значения U неплохо согласуются как с теоретическими, так и с реальными значениями потенциальной энергии. Напомним, что apriori

Пусть A обозначает любую из величин $U_{\text{реал}}$, U, U_5 и U_8. Соответствующие этим величинам столбцы 1, 2, 3 и 4 правой части рис. 1 разбиты на четыре столбика. В первых приведены средние значения $\bar{A}$. Длины зачерненных частей остальных столбиков в масштабе рисунка соответствуют величинам

$$\left[\overline{(A-\bar{A})^2}\right]^{1/2}/\bar{A}, \quad \left[\overline{(A-U_{\text{теор}})^2}\right]^{1/2}/U_{\text{теор}}, \quad \left[\overline{(A-U_{\text{реал}})^2}\right]^{1/2}/\bar{U}_{\text{реал}}$$

в приведенной последовательности. Усреднения произведены по всем пятнадцати скоплениям.

Автор выражает благодарность академику В. А. Амбарцумяну за обсуждение.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ՄՆԱՑԱԿԱՆՅԱՆ

Աղքատ գնդաձև կույտերում աստղերի բաշխումը որոշելու հարցի վերաբերյալ

Աստղերի տարածական բաշխման որոշումը աստղակույտերում՝ նրանց երկնային սֆերայի վրա պրոյեկտված դիտվող բաշխման միջոցով սովորաբար կատարվում է Ցեյպելի եղանակով։ Քանի արդեն այդ լուծումը ենթադրում է աստղակույտի գնդային համաչափությունը, ապա ներկա աշխատանքում առաջարկվում է օգտագործել դիտվող պատկերի շրջանային համաչափությունը՝ աստղերի բաշխման ավելի հարուստ նկարագրություն ստանալու նպատակով։ Պարզ արտածումների միջոցով մենք հանգում ենք (4) բանաձևով արտահայտվող միաչափ բաշխման ֆունկցիային, որն ունի հետևյալ երկրաչափական իմաստը։ Դիտվող երկչափանի բաշխումը պրոյեկտվում է պատահական y առանցքի վրա և ստացվող միաչափ բաշխումը միջինացվում է ըստ y առանցքի բոլոր հնարավոր ուղղությունների։ Աստղերի տարածական խտությունը որոշվում է Պլամերի (6) բանաձևի միջոցով։

Նշված եղանակի առավելությունները կայանում են հետևյալում։ Այն թույլ է տալիս ստանալ գործնականորեն անընդհատ բաշխման ֆունկցիա՝ աստղերի բաշխման համար, ընդ որում ճշտությամբ չի զիջում Ցեյպելի եղանակին։ Բացի այդ, առաջարկվող եղանակը կիրառելի է համեմատաբար աղքատ աստղակույտերի համար և հասարակ է՝ թվային հաշվումների տեսանկյունից։

Որպես օրինակ՝ (4) արտահայտության օգնությամբ որոշված են մի քանի արհեստականորեն կառուցված աղքատ աստղակույտերի պոտենցիալ էներգիաները և համեմատված նրանց տեսական և իրական արժեքների հետ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Амбарцумян*, ДАН СССР, 24, 875 (1939). [2] *v. Zeipel*, H., Annales de l'Observatorie de Paris, XXV, F. 31 (1908). [3] *H. C. Plummer*, Monthly Notices, LXXI, 460 (1911). [4] *Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов*, Таблицы математической статистики М., „Наука", 1965.